

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
"Амурский государственный университет"

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной и научной  
работе

                    Лейфа                    А.В. Лейфа

« 1 » сентября 2023 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА  
«МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ»

Направление подготовки 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика

Направленность (профиль) образовательной программы – Ракетно-космическая техника

Квалификация выпускника – Бакалавр

Год набора – 2023

Форма обучения – Очная

Курс     3     Семестр     6    

Зачет 6 сем

Общая трудоемкость дисциплины 72.0 (академ. час), 2.00 (з.е)

Составитель Л.И. Мороз, ведущий научный сотрудник, канд. физ.-мат. наук

Факультет математики и информатики

Кафедра математического анализа и моделирования

Рабочая программа составлена на основании Федерального государственного образовательного стандарта ВО для направления подготовки 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика, утвержденного приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 05.02.18 № 71

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры математического анализа и моделирования

01.09.2023 г. , протокол № 1

Заведующий кафедрой Максимова Н.Н. Максимова

СОГЛАСОВАНО

Учебно-методическое управление

Чалкина Н.А. Чалкина

« 1 » сентября 2023 г.

СОГЛАСОВАНО

Выпускающая кафедра

Соловьев В.В. Соловьев

« 1 » сентября 2023 г.

СОГЛАСОВАНО

Научная библиотека

Петрович О.В. Петрович

« 1 » сентября 2023 г.

СОГЛАСОВАНО

Центр цифровой трансформации и  
технического обеспечения

Тодосейчук А.А. Тодосейчук

« 1 » сентября 2023 г.

## 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

### Цель дисциплины:

изучение метода конечных элементов как математического аппарата, используемого для численной реализации математических моделей естественнонаучных явлений, а также овладение навыками использования современных пакетов прикладных программ, позволяющих решать задачи механики сплошных сред на основе МКЭ.

### Задачи дисциплины:

- освоение базиса МКЭ, общей концепции метода взвешенных невязок, метода Галеркина;
- изучение особенностей построения конечно-элементных решений для стационарных и нестационарных задач;
- изучение методов оценки погрешности МКЭ;
- изучение классификации простейших математических моделей жидких, твердых и газообразных сред и моделирование различных протекающих явлений и процессов;
- освоение алгоритмов и приемов программной реализации для решения практических задач;
- решение задач с использованием ППП COMSOL MULTIPHYSICS.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина «Метод конечных элементов» включена в часть учебного плана, формируемая участниками образовательных отношений. Для освоения дисциплины студенты используют знания, умения и виды деятельности, сформированные в процессе обучения в вузе в предшествующих семестрах. Этот курс тесно связан с основными математическими и информационными дисциплинами, изученными ранее: линейная алгебра, математический анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, теоретическая механика, численные методы и методы оптимизации, информатика. Освоение дисциплины потенциально полезно для прохождения преддипломной практики, написания выпускной квалификационной работы.

## 3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И ИНДИКАТОРЫ ИХ ДОСТИЖЕНИЯ

### 3.1 Профессиональные компетенции и индикаторы их достижения

Код и наименование профессиональной компетенции	Код и наименование индикатора достижения профессиональной компетенции
ПК-2 Способен подготавливать предложения и проводить работу по освоению и внедрению технологических процессов, новых материалов и программных продуктов технологического назначения	ИД-1пк-2 Знать: преимущества использования технологических процессов, новых материалов и программных продуктов технологического назначения. ИД-2пк-2 Уметь: разрабатывать программные приложения новых технологических процессов и материалов ИД-3пк-2 Владеть: практическим опытом проведения НИР и ОТР по освоению и внедрению новых технологических процессов материалов и программных продуктов

#### 4. СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2.00 зачетных единицы, 72.0 академических часов.

1 – № п/п

2 – Тема (раздел) дисциплины, курсовая работа (проект), промежуточная аттестация

3 – Семестр

4 – Виды контактной работы и трудоемкость (в академических часах)

4.1 – Л (Лекции)

4.2 – Лекции в виде практической подготовки

4.3 – ПЗ (Практические занятия)

4.4 – Практические занятия в виде практической подготовки

4.5 – ЛР (Лабораторные работы)

4.6 – Лабораторные работы в виде практической подготовки

4.7 – ИКР (Иная контактная работа)

4.8 – КТО (Контроль теоретического обучения)

4.9 – КЭ (Контроль на экзамене)

5 – Контроль (в академических часах)

6 – Самостоятельная работа (в академических часах)

7 – Формы текущего контроля успеваемости

1	2	3	4									5	6	7	
			4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9				
1	Введение в метод конечных элементов и численное моделирование	6	4		4									4	Устный опрос по теме практической работы «Решение прикладных задач в постановке уравнений с частными производным и в PDE toolbox ППП Matlab» (стационарные задачи).
2	Основы МКЭ. Базисные функции. Основные положения метода взвешенных невязок.	6	2		2									4	Устный опрос по теме практической работы «Решение прикладных задач в постановке уравнений с частными производным

																и в PDE toolbox ППП Matlab (нестационарные задачи)».	
3	Конечно-элементный метод Галеркина для реализации моделей в постановке краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений	6	4		4											4	Устный опрос по теме практической работы «Решение краевых задач в постановке обыкновенных дифференциальных уравнений МКЭ».
4	МКЭ для решения стационарных задач математической физики	6	4		4											4	Устный опрос по теме практической работы «Решение краевых задач для уравнения Пуассона МКЭ».
5	МКЭ для решения нестационарных задач математической физики	6	2													4	Устный опрос по теме «МКЭ для решения нестационарных задач математической физики»
6	Обзор современного специализированного программного обеспечения для КЭ моделирования систем. Возможности системы моделирования COMSOL MULTIPHYSICS.	6	2		2											4	Устный опрос по теме практической работы «Использование ППП COMSOL MULTIPHYSICS для моделирования физических систем»
7	Зачет	6								0.2						13.8	Зачет (теоретическая и практическая части)
	Итого			18.0		16.0		0.0	0.0	0.2	0.0	0.0				37.8	

## 5. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 5.1. Лекции

№ п/п	Наименование темы (раздела)	Содержание темы (раздела)
1	Введение в метод конечных элементов и численное моделирование	История развития, опыт и перспективы применения метода конечных элементов, задачи численного моделирования. Общие принципы построения математических моделей. Классификация моделей. Численное моделирование задач механики сплошных сред. Методология математического моделирования и МКЭ. МКЭ как математический аппарат реализации моделей сложных систем.
2	Основы МКЭ. Базисные функции. Основные положения метода взвешенных невязок.	Общая структура алгоритма МКЭ. Система базисных и весовых функций. Кусочно-постоянные базисные функции, кусочно-линейные непрерывные базисные функции. Линейно независимая система базисных функций, функции формы. Улучшение аппроксимации. Интерполяция, синус-ряды Фурье. Аппроксимация с помощью метода взвешенных невязок. Невязка, минимизация невязки. Весовые функции и методы взвешенных невязок: метод поточечной коллокации, коллокация по подобластям, метод Галеркина, метод наименьших квадратов.
3	Конечно-элементный метод Галеркина для реализации моделей в постановке краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений	Конечно-элементная аппроксимация решений дифференциальных уравнений и требование гладкости. Слабая формулировка метода Галеркина. Формирование локальной и глобальной матриц жесткости. Методология ансамблирования элементов. Основные этапы решения задач с помощью МКЭ. Решение одномерной краевой задачи теплопроводности с граничными условиями первого рода. Основные этапы решения, применение процедуры ансамблирования. Решение краевой задачи теплопроводности с граничными условиями второго рода. Пример модельной задачи теории упругости.
4	МКЭ для решения стационарных задач математической физики	Обобщение метода конечных элементов на двумерные и трехмерные задачи. Двумерные и трехмерные конечные элементы линейного типа. Принципы разбиения плоских областей на конечные элементы. Ленточные матрицы жесткости. Формирование многомерных базисных функций, ансамблирование и построение глобальных СЛАУ. Случай граничных условий, содержащих производные. Метод конечных элементов в многомерных стационарных задачах математической физики. Моделирование двумерных задач теплопроводности треугольными и прямоугольными конечными элементами. Метод конечных элементов для решения двумерной

		модельной задачи теории упругости в напряжениях с использованием треугольных конечных элементов.
5	МКЭ для решения нестационарных задач математической физики	Метод конечных элементов в многомерных нестационарных задачах математической физики. Особенности дискретизации задачи по времени. Погрешность конечно-элементного решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Погрешность конечно-элементного решения задач для уравнений с частными производными.
6	Обзор современного специализированного программного обеспечения для КЭ моделирования систем. Возможности системы моделирования COMSOL MULTIPHYSICS.	Конечно-элементные системы научных и инженерных расчетов. Современные FEA системы: NASTRAN, ANSYS, COMSOL, FLEX PDE, PDE tool MATLAB. Сравнительная характеристика систем.

## 5.2. Практические занятия

Наименование темы	Содержание темы
Введение в метод конечных элементов и численное моделирование	Практические занятия проводятся в компьютерном классе и предполагают решение прикладных задач по индивидуальным вариантам с использованием пакетов прикладных программ (по соответствующей теме дисциплины). Студенты решают задачи с использованием возможностей математических пакетов (ППП Matlab, ППП COMSOL MULTIPHYSICS) и реализуя алгоритмы изученных методов.
Основы МКЭ. Базисные функции. Основные положения метода взвешенных невязок.	Практические занятия проводятся в компьютерном классе и предполагают решение прикладных задач по индивидуальным вариантам с использованием пакетов прикладных программ (по соответствующей теме дисциплины). Студенты решают задачи с использованием возможностей математических пакетов (ППП Matlab, ППП COMSOL MULTIPHYSICS) и реализуя алгоритмы изученных методов.
Конечно-элементный метод Галеркина для реализации моделей в постановке краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений	Практические занятия проводятся в компьютерном классе и предполагают решение прикладных задач по индивидуальным вариантам с использованием пакетов прикладных программ (по соответствующей теме дисциплины). Студенты решают задачи с использованием возможностей математических пакетов (ППП Matlab, ППП COMSOL MULTIPHYSICS) и реализуя алгоритмы изученных методов.
МКЭ для решения стационарных задач математической физики	Практические занятия проводятся в компьютерном классе и предполагают решение прикладных задач по индивидуальным вариантам с использованием пакетов прикладных программ (по соответствующей

	<p>теме дисциплины). Студенты решают задачи с использованием возможностей математических пакетов (ППП Matlab, ППП COMSOL MULTIPHYSICS) и реализуя алгоритмы изученных методов.</p>
<p>Обзор современного специализированного программного обеспечения для КЭ моделирования систем. Возможности системы моделирования COMSOL MULTIPHYSICS.</p>	<p>Практические занятия проводятся в компьютерном классе и предполагают решение прикладных задач по индивидуальным вариантам с использованием пакетов прикладных программ (по соответствующей теме дисциплины). Студенты решают задачи с использованием возможностей математических пакетов (ППП Matlab, ППП COMSOL MULTIPHYSICS) и реализуя алгоритмы изученных методов.</p>

## 6. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

№ п/п	Наименование темы (раздела)	Содержание темы (раздела)	Трудоемкость в академических часах
1	Введение в метод конечных элементов и численное моделирование	Самостоятельная работа по теме практической работы	4
2	Основы МКЭ. Базисные функции. Основные положения метода взвешенных невязок.	Самостоятельная работа по теме практической работы	4
3	Конечно-элементный метод Галеркина для реализации моделей в постановке краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений	Самостоятельная работа по теме практической работы	4
4	МКЭ для решения стационарных задач математической физики	Самостоятельная работа по теме практической работы	4
5	МКЭ для решения нестационарных задач математической физики	Самостоятельная работа по теме практической работы	4
6	Обзор современного специализированного программного обеспечения для КЭ моделирования	Самостоятельная работа по теме практической работы	4



	систем. Возможности системы моделирования COMSOL MULTIPHYSICS.		
7	Зачет	Самостоятельная работа по теме практической работы	13.8

## 7. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

В соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 24.03.01 – «Ракетные комплексы и космонавтика» реализация компетентного подхода предусматривает широкое использование в учебном процессе активных и интерактивных форм проведения занятий в сочетании с внеаудиторной работой с целью формирования и развития профессиональных навыков обучающихся.

При преподавании дисциплины «Метод конечных элементов» используются как традиционные (лекция, проблемная лекция, лекция-семинар), так и инновационные технологии (применение мультимедийного проектора, семинар-дискуссия, «мозговой штурм», «метод проектов», возможно использование ресурсов сети Internet и электронных учебников). Лекционные занятия проводятся с использованием традиционной, активной и интерактивной форм обучения. Практические занятия проводятся с использованием активных и интерактивных форм обучения.

## 8. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

Примерные вопросы к зачету:

1. Общие принципы построения математических моделей. Классификация моделей. Численное моделирование задач механики сплошных сред.
2. Методология математического моделирования и МКЭ. МКЭ как математический аппарат реализации моделей сложных систем.
3. Общая структура алгоритма МКЭ. Система базисных и весовых функций. Кусочно-постоянные базисные функции, кусочно-линейные непрерывные базисные функции. Линейно независимая система базисных функций, функции формы.
4. Аппроксимация с помощью метода взвешенных невязок. Весовые функции и методы взвешенных невязок: метод поточечной коллокации, коллокация по подобластям, метод Галеркина, метод наименьших квадратов.
5. Конечно-элементная аппроксимация решений дифференциальных уравнений и требование гладкости. Слабая формулировка метода Галеркина. Основные этапы решения задач с помощью МКЭ на примере решения одномерной краевой задачи теплопроводности с граничными условиями первого рода.
6. Обобщение метода конечных элементов на двумерные и трехмерные задачи. Двумерные и трехмерные конечные элементы линейного типа. Принципы разбиения плоских областей на конечные элементы. Ленточные матрицы жесткости. Формирование многомерных базисных функций, ансамблирование и построение глобальных СЛАУ.
7. Случай граничных условий, содержащих производные. Метод конечных элементов в многомерных стационарных задачах математической физики. Моделирование двумерных задач теплопроводности треугольными и прямоугольными конечными элементами.
8. Метод конечных элементов для решения двумерной модельной задачи теории упругости в напряжениях с использованием треугольных конечных элементов.
9. Метод конечных элементов в многомерных нестационарных задачах математической физики. Особенности дискретизации задачи по времени.
10. Погрешность конечно-элементного решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Погрешность конечно-элементного решения задач для уравнений с частными производными.
11. Конечно-элементные системы научных и инженерных расчетов. Современные FEA

системы. Сравнительная характеристика систем.

## 9. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### а) литература

1. Румянцев, А. В. Метод конечных элементов в задачах теплопроводности : учебное пособие / А. В. Румянцев. — Калининград : Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта, 2011. — 113 с. — ISBN 978-5-9971-0210-4. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/23800.html> (дата обращения: 22.06.2023). — Режим доступа: для авторизир. пользователей
2. Кондаков, Н. С. Основы численных методов : практикум / Н. С. Кондаков. — Москва : Московский гуманитарный университет, 2014. — 92 с. — ISBN 978-5-98079-981-6. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/39690.html> (дата обращения: 22.06.2023). — Режим доступа: для авторизир. пользователей
3. Присекин, В. Л. Основы метода конечных элементов в механике деформируемых тел : учебник / В. Л. Присекин, Г. И. Расторгуев. — Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2010. — 238 с. — ISBN 978-5-7782-1287-9. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/45417.html> (дата обращения: 22.06.2023). — Режим доступа: для авторизир. пользователей
4. Холопов, И. С. Расчет плоских конструкций методом конечного элемента : учебное пособие / И. С. Холопов, И. В. Лосева. — Саратов : Самарский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2014. — 102 с. — ISBN 978-5-9585-0583-8. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/43399.html> (дата обращения: 22.06.2023). — Режим доступа: для авторизир. пользователей
5. Формалев В. Ф. Численные методы [Текст] : учеб. пособие: рек. НМС Мин. обр. РФ / В. Ф. Формалев, Д. Л. Ревизников ; под ред. А. И. Кибзуна. - 2-е изд., испр. и доп. - М. : Физматлит, 2006. - 399 с. 6. Метод конечных элементов: сб. учеб.-метод. материалов для направления подготовки 24.03.01/ АмГУ, ФМиИ; сост. А. Г. Масловская. - Благовещенск: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2017. - 14 с. Режим доступа: [http://irbis.amursu.ru/DigitalLibrary/AmurSU\\_Edition/7792.pdf](http://irbis.amursu.ru/DigitalLibrary/AmurSU_Edition/7792.pdf)

### б) программное обеспечение и Интернет-ресурсы

№	Наименование	Описание
1	MATLAB+SIMULINK	Academic classroom 25 по договору №2013.199430/949 от 20.11.2013.
2	Comsol Multiphysics	Лицензия на учебный класс по сублицензионному договору №20/15/230 т 16.12.2015.
3	<a href="http://www.amursu.ru">http://www.amursu.ru</a>	Официальный сайт ФГОУ ВО «Амурский государственный университет»
4	<a href="http://www.iprbookshop.ru/">http://www.iprbookshop.ru/</a>	Научно-образовательный ресурс для решения задач обучения в России и за рубежом. Уникальная платформа ЭБС IPRbooks объединяет новейшие информационные технологии и учебную лицензионную литературу
5	<a href="http://e.lanbook.com">http://e.lanbook.com</a>	Электронно-библиотечная система Издательство «Лань» – тематические пакеты: математика, физика, инженерно-технические науки. Ресурс, включающий в себя как электронные версии книг издательства «Лань» и других ведущих издательств учебной литературы, так

		и электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам.
--	--	--

в) профессиональные базы данных и информационные справочные системы

№	Наименование	Описание
1	<a href="https://scholar.google.ru/">https://scholar.google.ru/</a>	GoogleScholar — поисковая система по полным текстам научных публикаций всех форматов и дисциплин.
2	<a href="https://elibrary.ru/">https://elibrary.ru/</a>	Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU - российский информационно-аналитический портал в области науки, технологии, медицины и образования
3	<a href="http://neicon.ru">http://neicon.ru</a>	Полнотекстовый архив ведущих западных научных журналов на российской платформе Национального электронно-информационного консорциума (НЭИКОН)
4	<a href="http://www.mathnet.ru/">http://www.mathnet.ru/</a>	Math-Net.Ru. Общероссийский математический портал. Современная информационная система, предоставляющая российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России.
5	<a href="https://uisrussia.msu.ru/">https://uisrussia.msu.ru/</a>	Университетская информационная система РОССИЯ (УИС РОССИЯ).

#### 10. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Занятия по дисциплине проводятся в специальных помещениях, представляющих собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования.

Специальные помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории. Все помещения, в которых проводятся занятия, соответствуют действующим противопожарным правилам и нормам.

Каждый обучающийся обеспечен индивидуальным неограниченным доступом к электронно-библиотечным системам и к электронной информационно-образовательной среде университета. Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

На занятиях применяется следующее техническое оборудование: ПЭВМ на базе процессора Intel Pentium, проектор. Лекции проводятся в стандартной аудитории, оснащенной в соответствии с требованиями преподавания теоретических дисциплин, включая мультимедиа-проектор. Практические занятия проводятся в компьютерном классе, рассчитанном на 10 посадочных рабочих мест пользователей, в котором установлен и применяются пакеты прикладных программ Matlab и COMSOL MULTIPHYSICS. Данное оборудование и программное обеспечение применяется при изучении дисциплины.