

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Амурский государственный университет»



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной и научной работе

А.В. Лейфа

«01» 09 2021 г.

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

### МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Направление подготовки: 24.03.01 – Ракетные комплексы и космонавтика

Направленность (профиль) образовательной программы: Ракетно-космическая техника

Квалификация выпускника: бакалавр

Год набора: 2021

Форма обучения: очная

Курс 3 Семестр 6

Зачет 6 семестр

Общая трудоемкость дисциплины 72 (акад. час.), 2 (з.е.)

Составитель Л.И. Мороз, стар. преподаватель

Факультет математики и информатики

Кафедра математического анализа и моделирования

2021 г.

Рабочая программа составлена на основании Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 24.03.01 – «Ракетные комплексы и космонавтика», утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 05.02.2018 № 71.

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры математического анализа и моделирования

«06» 09 2021 г., протокол № 1

И.о. заведующего кафедрой \_\_\_\_\_ Н.Н. Максимова

СОГЛАСОВАНО

Учебно-методическое управление

«01» 09 2021 г.

СОГЛАСОВАНО

Выпускающая кафедра

«07» 09 2021 г.

В.В. Соловьев

СОГЛАСОВАНО

Научная библиотека

«01» 09 2021 г.

О.В. Петрович

СОГЛАСОВАНО

Центр информационных и образовательных технологий

«01» 09 2021 г.

## 1 ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

**Цель дисциплины:** изучение метода конечных элементов как математического аппарата, используемого для численной реализации математических моделей естественнонаучных явлений, а также овладение навыками использования современных пакетов прикладных программ, позволяющих решать задачи механики сплошных сред на основе МКЭ.

### **Задачи дисциплины:**

- освоение базиса МКЭ, общей концепции метода взвешенных невязок, метода Галеркина;
- изучение особенностей построения конечно-элементных решений для стационарных и нестационарных задач;
- изучение методов оценки погрешности МКЭ;
- изучение классификации простейших математических моделей жидких, твердых и газообразных сред и моделирование различных протекающих явлений и процессов;
- освоение алгоритмов и приемов программной реализации для решения практических задач;
- решение задач с использованием ППП COMSOL MULTIPHYSICS.

## 2 МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОП ВО

Дисциплина «Метод конечных элементов» включена в часть учебного плана, формируемую участниками образовательных отношений, раздел «Дисциплины по выбору». Для освоения дисциплины студенты используют знания, умения и виды деятельности, сформированные в процессе обучения в вузе в предшествующих семестрах. Этот курс тесно связан с основными математическими и информационными дисциплинами, изученными ранее: линейная алгебра, математический анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, теоретическая механика, численные методы и методы оптимизации, информатика. Освоение дисциплины потенциально полезно для прохождения преддипломной практики, написания выпускной квалификационной работы.

## 3 КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И ИНДИКАТОРЫ ИХ ДОСТИЖЕНИЯ

### 3.1 Профессиональные компетенции и индикаторы их достижения

Код и наименование профессиональной компетенции	Код и наименование индикатора достижения профессиональной компетенции
ПК-2 Способен подготавливать предложения и проводить работу по освоению и внедрению технологических процессов, новых материалов и программных продуктов технологического назначения	ИД-1 <sub>ПК-2</sub> Знать: - преимущества использования технологических процессов, новых материалов и программных продуктов технологического назначения. ИД-2 <sub>ПК-2</sub> Уметь: - разрабатывать программные приложения новых технологических процессов и материалов. ИД-3 <sub>ПК-2</sub> Владеть: - практическим опытом проведения НИР и ОТР по освоению и внедрению новых технологических процессов материалов и программных продуктов

#### 4 СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетные единицы, 72 академических часа.

№ п/п	Тема (раздел) дисциплины, курсовая работа, промежуточная аттестация	Семестр	Виды контактной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в акад. часах)			Контроль (в академических часах)	Самостоятельная работа (в академических часах)	Формы текущего контроля успеваемости
			Л	ПР	КТО			
1	Введение в метод конечных элементов и численное моделирование	6	4	4			4	Устный опрос по теме практической работы «Решение прикладных задач в постановке уравнений с частными производными в PDE toolbox ППП Matlab» (стационарные задачи).
2	Основы МКЭ. Базисные функции. Основные положения метода взвешенных невязок.	6	2	2			4	Устный опрос по теме практической работы «Решение прикладных задач в постановке уравнений с частными производными в PDE toolbox ППП Matlab (нестационарные задачи)».
3	Конечно-элементный метод Галеркина для реализации моделей в постановке краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений	6	4	4			4	Устный опрос по теме практической работы «Решение краевых задач в постановке обыкновенных дифференциальных уравнений МКЭ».
4	МКЭ для решения стационарных задач математической физики	6	4	4			4	Устный опрос по теме практической работы «Решение краевых задач для уравнения Пуассона МКЭ».
5	МКЭ для решения нестационарных задач математической физики	6	2	-			4	
6	Обзор современного специализированного программного обеспечения для КЭ моделирова-	6	2	2			4	Устный опрос по теме практической работы «Использование ППП COMSOL MULTIPHYSICS

№ п/п	Тема (раздел) дисциплины, курсовая работа, промежуточная аттестация	Семестр	Виды контактной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в акад. часах)			Контроль (в академических часах)	Самостоятельная работа (в академических часах)	Формы текущего контроля успеваемости
			Л	ПР	КТО			
	ния систем. Возможности системы моделирования COMSOL MULTIPHYSICS							для моделирования физических систем»
7	Зачет	6			0.2		13.8	Зачет (теоретическая и практическая части)
8	Итого		18	16	0.2		37.8	72 акад. час., 2 з.е.

Л – лекция, ПР – практическое занятие, КТО – контроль теоретического обучения.

## 5 СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 5.1 Лекции

№	Наименование темы	Содержание темы
1	Введение в метод конечных элементов и численное моделирование	История развития, опыт и перспективы применения метода конечных элементов, задачи численного моделирования. Общие принципы построения математических моделей. Классификация моделей. Численное моделирование задач механики сплошных сред. Методология математического моделирования и МКЭ. МКЭ как математический аппарат реализации моделей сложных систем.
2	Основы МКЭ. Базисные функции. Основные положения метода взвешенных невязок.	Общая структура алгоритма МКЭ. Система базисных и весовых функций. Кусочно-постоянные базисные функции, кусочно-линейные непрерывные базисные функции. Линейно независимая система базисных функций, функции формы. Улучшение аппроксимации. Интерполяция, синус-ряды Фурье. Аппроксимация с помощью метода взвешенных невязок. Невязка, минимизация невязки. Весовые функции и методы взвешенных невязок: метод поточечной коллокации, коллокация по подобластям, метод Галеркина, метод наименьших квадратов.
3	Конечно-элементный метод Галеркина для реализации моделей в постановке краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений	Конечно-элементная аппроксимация решений дифференциальных уравнений и требование гладкости. Слабая формулировка метода Галеркина. Формирование локальной и глобальной матриц жесткости. Методология ансамблирования элементов. Основные этапы решения задач с помощью МКЭ. Решение одномерной краевой задачи теплопроводности с граничными условиями первого рода. Основные этапы решения, применение процедуры ансамблирования. Решение краевой задачи теплопроводности с граничными условиями второго рода.

№	Наименование темы	Содержание темы
		Пример модельной задачи теории упругости.
4	МКЭ для решения стационарных задач математической физики	Обобщение метода конечных элементов на двумерные и трехмерные задачи. Двумерные и трехмерные конечные элементы линейного типа. Принципы разбиения плоских областей на конечные элементы. Ленточные матрицы жесткости. Формирование многомерных базисных функций, ансамблирование и построение глобальных СЛАУ. Случай граничных условий, содержащих производные. Метод конечных элементов в многомерных стационарных задачах математической физики. Моделирование двумерных задач теплопроводности треугольными и прямоугольными конечными элементами. Метод конечных элементов для решения двумерной модельной задачи теории упругости в напряжениях с использованием треугольных конечных элементов.
5	МКЭ для решения нестационарных задач математической физики	Метод конечных элементов в многомерных нестационарных задачах математической физики. Особенности дискретизации задачи по времени. Погрешность конечно-элементного решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Погрешность конечно-элементного решения задач для уравнений с частными производными.
6	Обзор современного специализированного программного обеспечения для КЭ моделирования систем. Возможности системы моделирования COMSOL MULTIPHYSICS.	Конечно-элементные системы научных и инженерных расчетов. Современные FEA системы: NASTRAN, ANSYS, COMSOL, FLEX PDE, PDE tool MATLAB. Сравнительная характеристика систем.

## 5.2 Практические занятия

№	Наименование темы	Содержание темы
1	Решение прикладных задач в постановке уравнений с частными производными в PDE toolbox ППП Matlab (стационарные задачи)	Практические занятия проводятся в компьютерном классе и предполагают решение прикладных задач по индивидуальным вариантам с использованием пакетов прикладных программ (по соответствующей теме дисциплины). Студенты решают задачи с использованием возможностей математических пакетов (ППП Matlab, ППП COMSOL MULTIPHYSICS) и реализуя алгоритмы изученных методов.
2	Решение прикладных задач в постановке уравнений с частными производными в PDE toolbox ППП Matlab (нестационарные задачи)	
3	Решение краевых задач в постановке обыкновенных дифференциальных уравнений МКЭ	
4	Решение краевых задач для уравнения Пуассона МКЭ	
5	Использование ППП COMSOL MULTIPHYSICS для моделирования физических систем	

Практические работы выполняются строго в соответствии с выданным преподавателем заданием и вариантом. Завершающим этапом выполнения работы является оформление от-

чета. Отчет оформляется каждым студентом в отдельной тетради. Отчет содержит: лист задания, раздел, содержащий теоретические основы соответствующего раздела курса, включая расчетные формулы основного метода и расчет погрешности метода, раздел, содержащий описание программной реализации: листинг программного блока, раздел, содержащий описание результатов, полученных с использованием возможностей ППП Matlab или ППП COMSOL MULTIPHYSICS.

## 6 САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Самостоятельная работа – 37.8 академических часов. По данному курсу в рамках самостоятельной работы студента предполагается подготовка к устной защите практических работ и подготовка к зачету.

№ п/п	№ раздела (темы) дисциплины	Форма (вид) самостоятельной работы	Трудоёмкость в акад. часах
1	1	Самостоятельная работа по теме практической работы «Решение прикладных задач в постановке уравнений с частными производными в PDE toolbox ППП Matlab (стационарные задачи)»	4
2	2	Самостоятельная работа по теме практической работы «Решение прикладных задач в постановке уравнений с частными производными в PDE toolbox ППП Matlab (нестационарные задачи)»	4
3	3	Самостоятельная работа по теме практической работы «Решение краевых задач в постановке обыкновенных дифференциальных уравнений МКЭ»	4
4	4-5	Самостоятельная работа по теме практической работы «Решение краевых задач для уравнения Пуассона МКЭ»	8
5	6	Самостоятельная работа по теме практической работы «Использование ППП COMSOL MULTIPHYSICS для решения прикладных задач МКЭ»	4
6		Подготовка к зачету	13.8
Итого			37.8

## 7 ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

В соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 24.03.01 – «Ракетные комплексы и космонавтика» реализация компетентного подхода предусматривает широкое использование в учебном процессе активных и интерактивных форм проведения занятий в сочетании с внеаудиторной работой с целью формирования и развития профессиональных навыков обучающихся.

При преподавании дисциплины «Метод конечных элементов» используются как традиционные (лекция, проблемная лекция, лекция-семинар), так и инновационные технологии (применение мультимедийного проектора, семинар-дискуссия, «мозговой штурм», «метод проектов», возможно использование ресурсов сети Internet и электронных учебников). Лекционные занятия проводятся с использованием традиционной, активной и интерактивной форм обучения. Практические занятия проводятся с использованием активных и интерактивных форм обучения.

## 8 ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

Примерные вопросы к зачету:

1. Общие принципы построения математических моделей. Классификация моделей. Численное моделирование задач механики сплошных сред.
2. Методология математического моделирования и МКЭ. МКЭ как математический аппарат реализации моделей сложных систем.
3. Общая структура алгоритма МКЭ. Система базисных и весовых функций. Кусочно-постоянные базисные функции, кусочно-линейные непрерывные базисные функции. Линейно независимая система базисных функций, функции формы.
4. Аппроксимация с помощью метода взвешенных невязок. Весовые функции и методы взвешенных невязок: метод поточечной коллокации, коллокация по подобластям, метод Галеркина, метод наименьших квадратов.
5. Конечно-элементная аппроксимация решений дифференциальных уравнений и требование гладкости. Слабая формулировка метода Галеркина. Основные этапы решения задач с помощью МКЭ на примере решения одномерной краевой задачи теплопроводности с граничными условиями первого рода.
6. Обобщение метода конечных элементов на двумерные и трехмерные задачи. Двумерные и трехмерные конечные элементы линейного типа. Принципы разбиения плоских областей на конечные элементы. Ленточные матрицы жесткости. Формирование многомерных базисных функций, ансамблирование и построение глобальных СЛАУ.
7. Случай граничных условий, содержащих производные. Метод конечных элементов в многомерных стационарных задачах математической физики. Моделирование двумерных задач теплопроводности треугольными и прямоугольными конечными элементами.
8. Метод конечных элементов для решения двумерной модельной задачи теории упругости в напряжениях с использованием треугольных конечных элементов.
9. Метод конечных элементов в многомерных нестационарных задачах математической физики. Особенности дискретизации задачи по времени.
10. Погрешность конечно-элементного решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Погрешность конечно-элементного решения задач для уравнений с частными производными.
11. Конечно-элементные системы научных и инженерных расчетов. Современные FEA системы. Сравнительная характеристика систем.

## 9 УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

а) литература

1. Румянцев, А. В. Метод конечных элементов в задачах теплопроводности [Электронный ресурс] : учебное пособие / А. В. Румянцев. — Электрон. текстовые данные. — Калининград : Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта, 2011. — 113 с. — 978-5-9971-0210-4. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/23800.html>
2. Кондаков, Н. С. Основы численных методов [Электронный ресурс] : практикум / Н. С. Кондаков. — Электрон. текстовые данные. — М. : Московский гуманитарный университет, 2014. — 92 с. — 978-5-98079-981-6. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/39690.html>
3. Присекин, В. Л. Основы метода конечных элементов в механике деформируемых тел [Электронный ресурс] : учебник / В. Л. Присекин, Г. И. Расторгуев. — Электрон. текстовые данные. — Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2010. — 238 с. — 978-5-7782-1287-9. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/45417.html>
4. Холопов, И. С. Расчет плоских конструкций методом конечного элемента [Электронный ресурс] : учебное пособие / И. С. Холопов, И. В. Лосева. — Электрон. тексто-



вые данные. — Саратов : Самарский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2014. — 102 с. — 978-5-9585-0583-8. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/43399.html>

5. Формалев В. Ф. Численные методы [Текст] : учеб. пособие: рек. НМС Мин. обр. РФ / В. Ф. Формалев, Д. Л. Ревизников ; под ред. А. И. Кибзуна. - 2-е изд., испр. и доп. - М. : Физматлит, 2006. - 399 с.

6. Метод конечных элементов: сб. учеб.-метод. материалов для направления подготовки 24.03.01/ АмГУ, ФМиИ; сост. А. Г. Масловская. - Благовещенск: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2017. - 14 с. Режим доступа: [http://irbis.amursu.ru/DigitalLibrary/AmurSU\\_Edition/7792.pdf](http://irbis.amursu.ru/DigitalLibrary/AmurSU_Edition/7792.pdf)

б) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

№	Наименование	Описание
1	Операционная система Windows 7 Pro	Dream Spark Premium Electronic Software Delivery (3 years) Renewal по договору – Сублицензионный договор № Tr000074357/КНВ 17 от 01 марта 2016 года
2	Google Chrome	Бесплатное распространение по лицензии google chromium <a href="http://code.google.com/intl/ru/chromium/terms.html">http://code.google.com/intl/ru/chromium/terms.html</a> На условиях <a href="https://www.google.com/chrome/browser/privacy/eula_text.html">https://www.google.com/chrome/browser/privacy/eula_text.html</a>
3	7-Zip	Бесплатное распространение по лицензии GNU LGPL <a href="http://www.7-zip.org/license.txt">http://www.7-zip.org/license.txt</a>
4	LibreOffice	бесплатное распространение по лицензии GNU LGPL <a href="https://ru.libreoffice.org/about-us/license/">https://ru.libreoffice.org/about-us/license/</a>
5	MATLAB+SIMULINK	Academic classroom 25 по договору №2013.199430/949 от 20.11.2013
6	Comsol Multiphysics	Лицензия на учебный класс по сублицензионному договору №20/15/230 т 16.12.2015
7	<a href="http://www.amursu.ru">http://www.amursu.ru</a>	Официальный сайт ФГОУ ВО «Амурский государственный университет»
8	<a href="http://www.iprbookshop.ru/">http://www.iprbookshop.ru/</a>	Научно-образовательный ресурс для решения задач обучения в России и за рубежом. Уникальная платформа ЭБС IPRbooks объединяет новейшие информационные технологии и учебную лицензионную литературу
8	<a href="http://e.lanbook.com">http://e.lanbook.com</a>	Электронно-библиотечная система Издательство «Лань» – тематические пакеты: математика, физика, инженерно-технические науки. Ресурс, включающий в себя как электронные версии книг издательства «Лань» и других ведущих издательств учебной литературы, так и электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам.

в) профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

№	Наименование	Описание
1	<a href="https://scholar.google.ru/">https://scholar.google.ru/</a>	GoogleScholar — поисковая система по полным текстам научных публикаций всех форматов и дисциплин.
2	<a href="https://elibrary.ru/">https://elibrary.ru/</a>	Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU - российский информационно-аналитический портал в области науки, технологии, медицины и образования

№	Наименование	Описание
3	<a href="http://neicon.ru">http://neicon.ru</a>	Полнотекстовый архив ведущих западных научных журналов на российской платформе Национального электронно-информационного консорциума (НЭИКОН)
4	<a href="https://uisrussia.msu.ru/">https://uisrussia.msu.ru/</a>	<a href="https://uisrussia.msu.ru/">Университетская информационная система РОССИЯ (УИС РОССИЯ).</a>
5	<a href="http://www.mathnet.ru/">http://www.mathnet.ru/</a>	Math-Net.Ru. Общероссийский математический портал. Современная информационная система, предоставляющая российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России.

### **10 МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

Занятия по дисциплине проводятся в специальных помещениях, представляющих собой учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования.

Специальные помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории. Все помещения, в которых проводятся занятия, соответствуют действующим противопожарным правилам и нормам.

Каждый обучающийся обеспечен индивидуальным неограниченным доступом к электронно-библиотечным системам и к электронной информационно-образовательной среде университета. Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

На занятиях применяется следующее техническое оборудование: ПЭВМ на базе процессора Intel Pentium, проектор. Лекции проводятся в стандартной аудитории, оснащенной в соответствии с требованиями преподавания теоретических дисциплин, включая мультимедиа-проектор. Практические занятия проводятся в компьютерном классе, рассчитанном на 10 посадочных рабочих мест пользователей, в котором установлен и применяются пакеты прикладных программ Matlab и COMSOL MULTIPHYSICS. Данное оборудование и программное обеспечение применяется при изучении дисциплины.